

حسابان ۲- ۲۰ سوال - ۳۰ دقیقه:

۱- آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = \sqrt{10x - x^2}$ در کدام نقطه با آهنگ تغییر متوسط این تابع در بازه $[1, 2]$ برابر است؟

(۱) $\frac{10 + 5\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{10 - 5\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ (۴) $\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$

۲- اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه $x=2$ مشتق پذیر و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x^2 - 3x + 2} = 4$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{g(2+h) - 5} = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $(f \times g)'(2)$ کدام است؟

(۱) ۲۸ (۲) ۳۶ (۳) ۴۴ (۴) ۵۲

۳- کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = (x + [-x])\sqrt{x}$ درست است؟

(۱) $f'(0) = 0$ (۲) $f'_-(0) = +\infty, f'_+(0) = 0$
 (۳) $f'_-(0) = 0, f'_+(0) = -\infty$ (۴) $f'_-(0) = 0, f'_+(0) = +\infty$

۴- خطوط مماس بر نمودار تابع $f(x) = 2x - 3\sqrt{x-2}$ در نقاطی به طول ۲ و α روی نمودار تابع، بر هم عمودند. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای α کدام است؟

(۱) $\frac{33}{8}$ (۲) $\frac{31}{8}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۵- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 1}$ در نقطه $(3, f(3))$ ، نمودار این تابع را، در نقطه دیگری قطع می کند. طول این نقطه کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۶- اگر $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & x > 2 \\ \frac{c}{x} & x \leq 2 \end{cases}$ و $f'(2) = 4$ باشد، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

(۱) -۱۲ (۲) -۱۶ (۳) -۲۰ (۴) -۲۴

۷- تابع $f(x) = x|x^2 - 3x| + x^2$ در نقطه $x = a$ مشتق پذیر نیست. مقدار $f'_+(a) - f'_-(a)$ کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۳۰

۸- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ x^3 & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 1 \\ x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} & x < 1 \end{cases}$ باشد، $h(x) = g \circ f(x)$ کدام گزینه درست است؟

(۱) $h'(1) = 8$ (۲) $h'_-(1)$ و $h'_+(1)$ ناموجود

(۳) $h'_-(1) = \frac{1}{3}, h'_+(1) = 4$ (۴) $h'_-(1)$ و $h'_+(1)$ ناموجود

۹- اگر $f(x) = 4\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 1 - x - 3$ باشد، مشتق تابع $y = f \circ f(x)$ در $x = 8$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{25}{54}$ (۲) $\frac{23}{54}$ (۳) $-\frac{29}{36}$ (۴) $\frac{17}{36}$

۱۰- اگر تساوی $f(2x+1) = x^2 g(3x+2)$ به ازای هر مقدار x برقرار و $g(5) = g'(5) = g''(5) = 2$ باشد، مقدار $f''(3)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) $\frac{23}{2}$ (۳) ۱۲ (۴) $\frac{19}{2}$

۱۱- اگر $f(x) = x + \sqrt{3x+1}$ باشد، حاصل مشتق تابع $y = xf(x)$ در نقطه $x = 1$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{19}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۲- با فرض $f(x) = x^3 - x - 1$ ، حاصل مشتق تابع $f \circ f'$ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۴۴ (۳) ۵۵ (۴) ۶۶

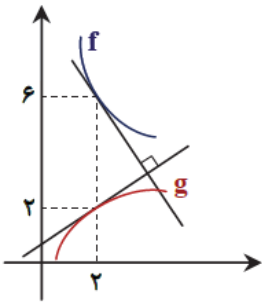
۱۳- آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = \cos x \cdot \sin 2x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{3}$ ، چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ است؟

- (۱) $-\frac{5\pi}{18}$ (۲) $-\frac{5\pi}{6}$ (۳) $-\frac{\pi}{9}$ (۴) $-\frac{\pi}{12}$

۱۴- فرض کنید f یک تابع چندجمله‌ای درجه دوم و $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \geq 1 \\ f'(x) & ; x < 1 \end{cases}$ باشد؛ اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 2$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۵- در شکل روبه‌رو، نمودار توابع f و g و خطوط مماس بر آن‌ها رسم شده‌اند. اگر $(f \cdot g)'(2) = 1$ باشد، مقدار $(\frac{f}{g})'(2)$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{2}{25}$ (۲) $-\frac{2}{75}$ (۳) $-\frac{1}{25}$ (۴) $-\frac{1}{75}$

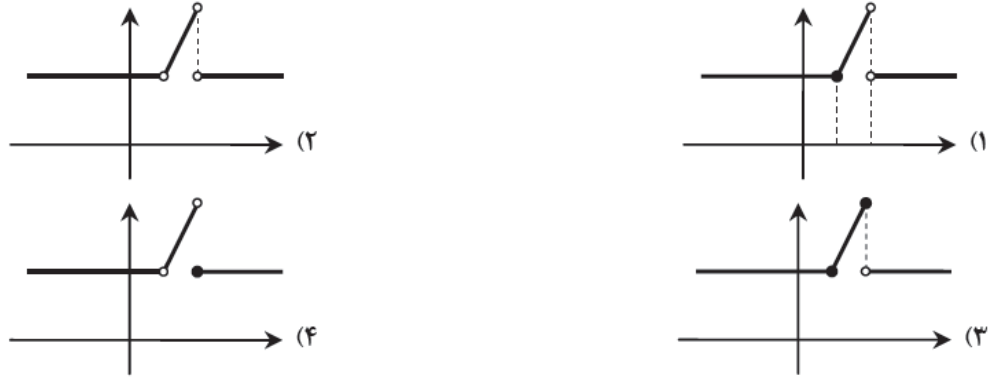
۱۶- شیب نیم‌مماس راست و نیم‌مماس چپ بر نمودار تابع پیوسته f در نقطه $x = 1$ به ترتیب برابر ۵ و -۲ است. حاصل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\frac{x-1}{x+1}) - f(1)}{\frac{1}{x+1}}$$

برابر کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) -۱۰ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۷- نمودار تابع مشتق تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & [x] = 1 \\ 3x - 1 & [x] \neq 1 \end{cases}$ به کدام صورت است؟



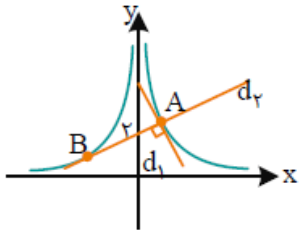
۱۸- از نقطه‌ای به عرض k واقع بر محور y ها، دو مماس بر سهمی $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ رسم نموده‌ایم. به‌ازای کدام مقدار k ، زاویه بین این دو مماس برابر 120° است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -1 (۴) $-\frac{5}{6}$

۱۹- اگر $f(x) = \begin{cases} 2\cos \pi x & x \leq 1 \\ \frac{3x^3 + ax^2 + bx + 9}{x^2 - 1} & x > 1 \end{cases}$ مقدار $f'_+(1)$ در صورت وجود کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۱۱ (۳) -۱ (۴) ۱۰

۲۰- در شکل مقابل، دوخط d_1 و d_2 بر هم عمودند و هر دو بر نمودار تابع $f(x) = \frac{4}{x^2}$ مماس‌اند. طول نقطه A کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) $\sqrt{2}$
(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

گسسته - ۱۰ سوال - ۱۵ دقیقه:

۲۱- با رئوس a, b, c و d و دو یال، چند گراف ساده وجود دارد که مجموعه احاطه‌گر مینیمم آن‌ها یکتا باشد؟

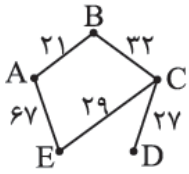
- (۱) ۲ (۲) ۴
(۳) ۶ (۴) ۱۲

۲۲- گرافی ناهمبند، ۳- منتظم، با رئوس نام‌گذاری‌شده و اندازه ۱۲ داریم. این گراف چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴
(۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۲۳- هر ایستگاه آتش‌نشانی تا فاصله ۵۰ کیلومتر را پوشش می‌دهد. فاصله بین پنج منطقه A, B, C, D و E در زیر

نشان داده شده است. حداقل چند ایستگاه آتش‌نشانی لازم است تا تمام مناطق، زیر پوشش باشند؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۲۴- گراف با درجه رئوس ۱، ۲، ۲ و ۳ چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال دارد؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲۵- در گرافی ۲- منتظم از مرتبه ۱۲، حداکثر عدد احاطه‌گری کدام است؟

۵ (۲)

۴ (۱)

۷ (۴)

۶ (۳)

۲۶- در کدام گراف، رابطه $\gamma(G) = \left\lceil \frac{P}{\Delta + 1} \right\rceil$ برقرار نمی‌باشد؟



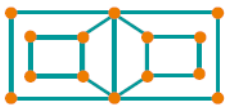
۲۷- عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)



۲۸- در گرافی $P=7$ و $\gamma(G)=1$ می‌باشد. اگر این گراف، فقط ۲ مجموعه احاطه‌گر مینیمم داشته باشد، حداکثر اندازه گراف کدام است؟

۲۴ (۴)

۱۷ (۳)

۲۵ (۲)

۱۸ (۱)

۲۹- گراف P_7 چند γ - مجموعه دارد؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۳۰- فرض کنید $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $\deg(a) = 2$ باشد، چند گراف G می‌توان ساخت به طوری که $N_G(a)$ ، یک مجموعه احاطه‌گر باشد؟

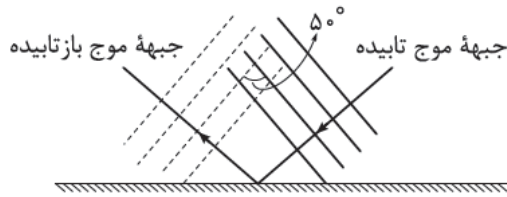
۷۲۰ (۴)

۲۱۶۰ (۳)

۴۳۲۰ (۲)

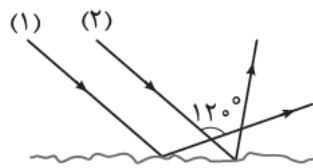
۱۴۴۰ (۱)

۳۱- شکل زیر، جبهه‌های فرودی و بازتابیده یک موج مکانیکی از یک سطح تخت و نمودار پرتویی مربوط به آن را نشان می‌دهد. زاویه بازتابش این موج چند درجه است؟



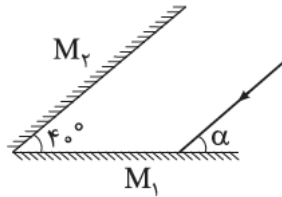
- (۱) ۲۰
- (۲) ۶۵
- (۳) ۴۰
- (۴) ۵۰

۳۲- دو پرتو موازی (۱) و (۲) مطابق شکل به یک سطح تابیده شده است. اگر اختلاف زاویه‌های تابش دو پرتو، برابر با 30° باشد، اختلاف زاویه‌های بازتاب چند درجه و طول موج پرتوها از ابعاد ناهمواری‌های سطح است.



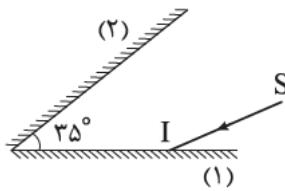
- (۱) ۱۵ - بیشتر
- (۲) ۱۵ - کم‌تر
- (۳) ۳۰ - بیشتر
- (۴) ۳۰ - کم‌تر

۳۳- مطابق شکل زیر، پرتو نوری تحت زاویه α به آینه تخت M_1 می‌تابد. اگر پس از دومین برخورد به آینه M_1 پرتو بر روی خودش بازتاب شود، چند درجه است؟



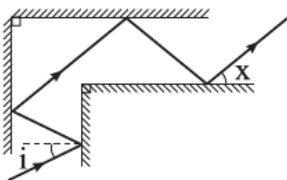
- (۱) ۱۰
- (۲) ۲۰
- (۳) ۳۰
- (۴) ۴۰

۳۴- در شکل زیر، پرتوی SI با زاویه تابش 80° بر سطح آینه تخت (۱) می‌تابد. زاویه بین این دو آینه تخت متقاطع را حداقل چند درجه و چگونه تغییر دهیم تا پرتوی بازتاب نهایی، نسبت به پرتوی تابش اولیه (SI)، 180° منحرف شود؟



- (۱) افزایش، 5°
- (۲) کاهش، 5°
- (۳) افزایش، 1°
- (۴) کاهش، 1°

۳۵- شکل زیر مسیر حرکت پرتویی را بین آینه‌های تخت متقاطع، که دوبه‌دو موازی‌اند، نشان می‌دهد. اگر زاویه تابش \hat{I} را 10° افزایش دهیم، زاویه X چند درجه و چگونه تغییر می‌کند؟



- (۱) ۱۰ درجه افزایش می‌یابد.
- (۲) ۲۰ درجه افزایش می‌یابد.
- (۳) ۱۰ درجه کاهش می‌یابد.
- (۴) ۲۰ درجه کاهش می‌یابد.

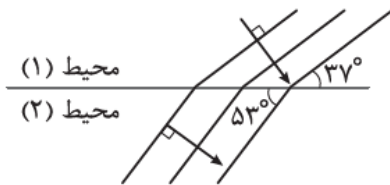
۳۶- حداقل فاصله یک شخص تا دیوار باید $5/16$ m باشد تا پژواک صدای خود را از صدای اصلی تمیز دهد. مسافتی که صوت در یک دقیقه در محیط طی می‌کند، چند کیلومتر است؟

- (۱) ۹/۹
- (۲) ۱۹/۸
- (۳) ۳۹/۶
- (۴) ۴۹/۵

۳۷- موتورسواری که با سرعت ثابت 30 m/s به طرف دیوار بزرگی در حال حرکت است، در لحظه t_1 تیری را شلیک می‌کند. اگر او 4 s پس از لحظه t_1 پژواک صدای شلیک تیر را از دیوار بشنود، در لحظه t_1 فاصله‌اش از دیوار چند متر بوده است؟ (تندی انتشار صوت در هوا را 340 m/s در نظر بگیرید.)

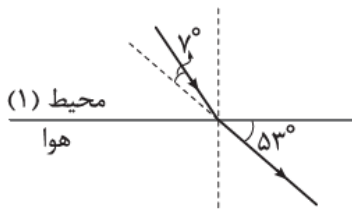
- (۱) ۵۴۰ (۲) ۶۲۰ (۳) ۶۸۰ (۴) ۷۴۰

۳۸- مطابق شکل جبهه‌های موجی با بسامد 2000 Hz از محیط (۱) وارد محیط (۲) شده‌اند. اگر اختلاف تندی موج در دو محیط 300 m/s باشد، طول موج آن در محیط (۱) چند سانتی‌متر است؟ ($\sin 37^\circ = 0.6$)



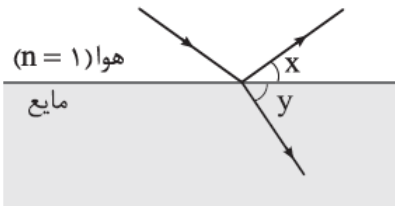
- (۱) ۳۰
(۲) ۴۵
(۳) ۶۰
(۴) ۹۰

۳۹- مطابق شکل، پرتو نوری از محیط (۱) وارد هوا می‌شود و طول موج آن 100 nm افزایش می‌یابد. بسامد نور چند هرتز است؟ (تندی نور در هوا و خلأ را یکسان فرض کنید.) ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ و $\sin 37^\circ = 0.6$)



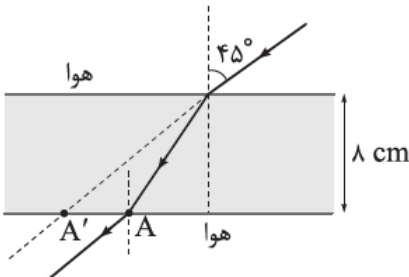
- (۱) 5×10^{15}
(۲) 6×10^{15}
(۳) 5×10^{14}
(۴) 6×10^{14}

۴۰- مطابق شکل، یک پرتو موج الکترومغناطیسی تک‌رنگ با بسامد $4 \times 10^{15} \text{ Hz}$ از هوا به سطح یک مایع شفاف می‌تابد. بخشی از پرتو، بازتاب و بخش دیگری از آن شکسته شده و وارد مایع می‌شود. اگر $\cos x = \frac{4}{3} \cos y$ باشد، طول موج نور در مایع چند نانومتر است؟ ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$)



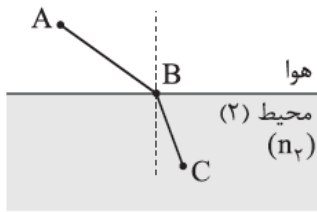
- (۱) ۷۵
(۲) ۱۰۰
(۳) $56/25$
(۴) $37/5$

۴۱- پرتو نوری مطابق شکل از هوا به یک تیغه متوازی‌السطوح می‌تابد و پس از شکست در تیغه از نقطه A وارد هوا می‌شود، به طوری که امتداد پرتو تابش اولیه در نقطه A' به سطح پایینی تیغه برخورد می‌کند و $AA' = 2 \text{ cm}$ است. با افزایش ضخامت تیغه به 12 سانتی‌متر، فاصله AA' چه قدر تغییر می‌کند؟



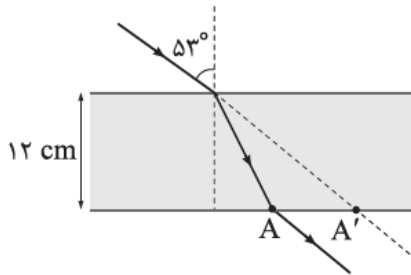
- (۱) ۱ سانتی‌متر افزایش می‌یابد.
(۲) ۱ سانتی‌متر کاهش می‌یابد.
(۳) ۳ سانتی‌متر افزایش می‌یابد.
(۴) ۳ سانتی‌متر کاهش می‌یابد.

۴۲- یک پرتوی نور، مسیر ABC را مطابق شکل زیر، از هوا تا درون محیط (۲) در مدت 350 ns طی می‌کند. اگر $AB = 2BC = 60 \text{ m}$ باشد، ضریب شکست محیط (۲) کدام است؟ ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$)



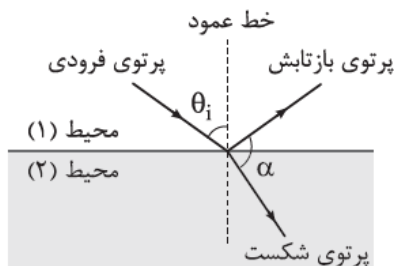
- (۱) $\frac{6}{5}$
 (۲) $\frac{4}{3}$
 (۳) $\frac{3}{2}$
 (۴) $\frac{5}{4}$

۴۳- شکل زیر، مسیر حرکت پرتویی را نشان می‌دهد که از خلأ به سطح یک تیغه متوازی‌السطوح تابیده شده است. اگر $AA' = 4 \text{ cm}$ باشد، مدت زمان حرکت پرتو درون تیغه چند پیکوثانیه است؟ ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ و $\sin 53^\circ = 0.8$)



- (۱) ۵۰
 (۲) ۵۰۰
 (۳) ۶۴
 (۴) ۶۴۰

۴۴- در شکل زیر که طرحی از بازتاب و شکست یک پرتوی نور را نشان می‌دهد، زاویه تابش (θ_i) چگونه تغییر کند تا زاویه بین پرتوی بازتابش و پرتوی شکست (α) افزایش یابد؟



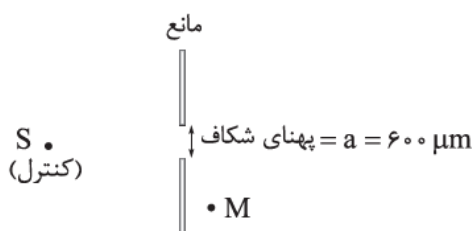
- (۱) کم‌تر از 5° کاهش یابد.
 (۲) بیشتر از 5° کاهش یابد.
 (۳) کم‌تر از 5° افزایش یابد.
 (۴) بیشتر از 5° افزایش یابد.

۴۵- چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

- (الف) از آن‌جا که سراب وجود خارجی ندارد، نمی‌توان از آن عکس گرفت.
 (ب) با افزایش دمای هوا، ضریب شکست به تدریج افزایش می‌یابد.
 (پ) ضریب شکست هر محیطی به طول موج نور در آن محیط بستگی دارد.
 (ت) هنگام عبور نور سفید از منشور، نور بنفش کم‌ترین انحراف را دارد.

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) صفر

۴۶- مطابق شکل، تلویزیونی در نقطه M قرار دارد. وقتی از نقطه S و با یک دستگاه کنترل، موجی به طول موج $100 \mu\text{m}$ ارسال می‌کنیم، تلویزیون عمل نمی‌کند. برای آن‌که امواج به این تلویزیون برسند، کدام‌یک از راهکارهای زیر می‌تواند مؤثر باشد؟ ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$)



- (الف) پهنای شکاف مانع را دو برابر کنیم.
 (ب) بسامد دستگاه کنترل را به 1 THz برسانیم.
 (پ) با نزدیک کردن کنترل به شکاف مانع، ناحیه سایه مانع را کاهش دهیم.
 (ت) طول موج دستگاه کنترل را به $50 \mu\text{m}$ برسانیم.

- (۱) الف و ب
 (۲) ب و پ
 (۳) پ و ت
 (۴) الف و ت

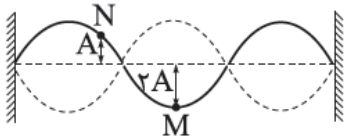
۴۷- آزمایش ینگ را یک مرتبه با نوری با بسامد $f_1 = f$ در هوا و مرتبه دوم با نوری با بسامد $f_2 = \frac{5}{4}f$ در آب انجام می‌دهیم. پهنای هر نوار روشن در آزمایش اول چند برابر پهنای هر نوار روشن در آزمایش دوم است؟ ($n_{\text{آب}} = \frac{4}{3}$ ، سایر شرایط آزمایش در هر دو محیط یکسان است.)

- (۱) $\frac{16}{15}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{15}{16}$ (۴) $\frac{5}{3}$

۴۸- در یک طناب با دو انتهای بسته، یک موج ایستاده با ۴ گره و بسامد 800 Hz تشکیل شده است. اگر طول طناب 120 cm باشد، فاصله یک گره تا شکم مجاورش چند سانتی‌متر است؟

- (۱) $7/5$ (۲) 10 (۳) 15 (۴) 20

۴۹- تاری که بین دو تکیه‌گاه محکم شده است، مطابق شکل به نوسان درمی‌آید. اگر فاصله دو تکیه‌گاه 75 cm و تندی موج عرضی در آن 250 m/s باشد، به ترتیب چند میلی‌ثانیه طول می‌کشد تا هر یک از ذرات M و N یک نوسان کامل انجام دهند؟



- (۱) 2 و 4 (۲) 2 و 2 (۳) 4 و 2 (۴) 4 و 4

۵۰- تاری با دو انتهای ثابت در هماهنگ سوم خود به نوسان درمی‌آید. اگر بسامد تار را 480 Hz افزایش دهیم، فاصله بین دو شکم متوالی نصف می‌شود. اگر تندی موج عرضی در تار 240 m/s باشد، طول تار چند سانتی‌متر است؟

- (۱) 150 (۲) 100 (۳) 75 (۴) $37/5$